

## 7. Funkcje wymierne

mgr A. Piłat, mgr M. Małycha, mgr M. Kucharska

1. Podaj dziedzinę funkcji i sprowadź ją do najprostszej postaci:

a)  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^4 - 16}$ ,

b) (R)  $f(x) = \frac{(x^3 - 1)(x^2 - 4)}{(x^2 + x - 2)(x - 2)}$ .

2. Dane są wyrażenia  $u = \frac{3x^2 + 12x}{(x-1)(x+4)}$  i  $w = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1}$ .

a) Wyznacz dziedzinę każdego z nich.

b) Skróć ułamki  $u$  i  $w$ .

c) Zapisz  $u + w$  w postaci ułamka.

3. Iloczyn liczb  $x$  i  $y$  jest równy połowie ich sumy. Wyznacz liczbę  $y$  jako funkcję liczby  $x$  dla  $x \neq \frac{1}{2}$ .

4. Dane jest równanie  $-x + xy - y - 3 = 0$ . Wyznacz  $y$  w zależności od  $x$ . Ustal warunki istnienia takiej zależności oraz  $x$ , dla którego  $y$  przyjmuje wartość 5.

5. Wyznacz wszystkie wartości zmiennej  $x$ , dla których wartości funkcji  $f(x) = \frac{3}{x-1}$  są równe wartościom funkcji  $g(x) = \frac{4}{x+4}$ .

6. Wykonaj działania, określ dziedzinę:

a) (R)  $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 8} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1}$ ,

b)  $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x^2+x}{3x-3}$ ,

c)  $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$ ,

d)  $\left(x - \frac{x-2}{1+2x}\right) : \left(1 + \frac{x(x-2)}{1+2x}\right)$ ,

e)  $\left(\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y}\right) \frac{x^2+xy}{x^2y^2}$ .

7. Rozwiąż równanie:

a)  $x + 1 = \frac{2}{x}$ ,

b)  $\frac{2x-3}{x-3} = 3$ ,

c)  $\frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x-1}$ ,

d)  $\frac{2-3x}{1-2x} = -\frac{1}{2}$ ,

e)  $\frac{x(x+1)}{x-1} = 5x - 4$ , dla  $x \neq 1$ ,

f)  $x + \frac{3}{x-3} = \frac{2x+3}{3-x}$ ,

g)  $\frac{x+2}{x} + \frac{x}{x+2} = 2$ ,

h)  $1 + \frac{x}{x+2} = \frac{2x^2}{x^2-4}$ ,

i)  $\frac{x-2}{x} + \frac{1}{x-4} = \frac{4}{x^2-4x}$ .

8. Naszkicuj wykres funkcji, wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości, podaj równania asymptot, oblicz miejsca zerowe, określ argument, dla którego funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, podaj przedziały monotoniczności:

a)  $f(x) = 1 - \frac{4}{x+2}$ ,

b)  $f(x) = \frac{2}{3x-6}$ .

9. Odległość między dwiema przystaniami położonymi na rzece wynosi 8 km. Łódka przepływa tę drogę w obie strony w czasie 1 h i 40 minut. Oblicz prędkość łódki na wodzie stojącej, jeśli wiadomo, że prędkość prądu rzeki wynosi  $2\frac{km}{h}$ .

10. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Dziedziną funkcji  $f(x) = \frac{3x-1}{x^3+2x^2-4x-8}$  jest zbiór:

(A)  $\{-2, 2\}$ , (B)  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ , (C)  $\mathbb{R}$ , (D)  $\langle -2, 2 \rangle$ .

7. Funkcje wymierne

mgr A. Piłat, mgr M. Małycha, mgr M. Kucharska

b) Miejscami zerowymi funkcji  $f(x) = \frac{x^3 - 13x + 12}{x + 4}$  są liczby:

- (A)  $-4, 1, 3$       (B)  $-3, 1, 4$       (C)  $3, 1$       (D)  $-4$ .

c) Rozwiązaniem równania  $\frac{2x+5}{x+1} = \frac{2}{x}$  jest:

- (A)  $\{-1, 0\}$ ,      (B)  $\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}\}$ ,      (C)  $\{-2, \frac{1}{2}\}$ ,      (D)  $\{-2, -1\}$ .

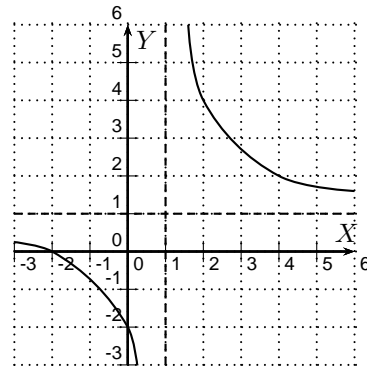
d) Przesuwając wykres funkcji  $y = \frac{-2}{x}$  równoległe do osi  $OX$  w prawo o 5 jednostek oraz równoległe do osi  $OY$  w dół o 3 jednostki, otrzymasz wykres funkcji:

- (A)  $g(x) = \frac{-2}{x+3} + 5$ ,      (B)  $g(x) = \frac{-2}{x-5} - 3$ ,      (C)  $g(x) = \frac{-2}{x+5} + 3$ ,      (D)  $g(x) = \frac{-2}{x-5} + 3$ .

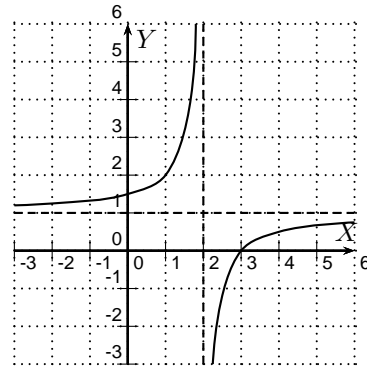
e) Rozwiązaniem równania  $\frac{x-3}{2-x} = \frac{1}{2}$  jest liczba

- (A)  $-\frac{4}{3}$ ,      (B)  $-\frac{3}{4}$ ,      (C)  $\frac{3}{8}$ ,      (D)  $\frac{8}{3}$ .

11. (R) W oparciu o wykres funkcji wymiernej określonej wzorem  $f(x) = \frac{ax+2}{bx+c}$ , wyznacz wartości  $a, b, c$ .



12. (R) Asymptotą pionową wykresu funkcji  $f$  o wzorze  $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ , jest prosta o równaniu  $x = 2$ , a asymptotą poziomą prosta  $y = 1$  (zobacz rysunek). Wyznacz wzór funkcji  $f$ .



13. (R) Sporządź wykres funkcji  $f(x) = \frac{-3x-6}{x+3}$ .

14. (R) Dany jest trójmian kwadratowy  $w$  określony dla  $x \in \mathbb{R}$  wzorem  $w(x) = (m-4)x^2 + (m+2)x + m+2$ . Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej wartości rzeczywistej  $m$  iloczyn pierwiastków rzeczywistych równania kwadratowego  $w(x) = 0$ . Narysuj wykres funkcji  $f$ .

15. (R) Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{|x^2-4|}{2-|x|}$ , a następnie określ, dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $f(x) = m$  nie ma rozwiązania.

16. (R) Sporządź wykres funkcji  $f(x) = \left| \frac{x-4}{x-2} \right|$ , a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ , dla których równanie  $\left| \frac{x-4}{x-2} \right| = k$ , ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.

17. (R) Rozpatrujemy wszystkie prostokąty o polu równym 6, których dwa sąsiednie boki zawarte są w osiach  $OX$  i  $OY$  układu współrzędnych. Wyznacz równanie krzywej będącej zbiorem tych wierzchołków rozpatrywanych prostokątów, które nie leżą na żadnej z osi układu współrzędnych. Narysuj tę krzywą.

18. (R) Rozwiąż nierówność:

a)  $\frac{3}{x-2} \leq \frac{2}{x+3}$ ,

b)  $x \geq \frac{x+1}{1-x}$ ,

c)  $\frac{2x-5}{3-4x} > 1$ ,

d)  $\frac{(x-2)^3(x-1)}{(x-5)^2(x+1)} \leq 0$ ,

e)  $\frac{x^3-x+6}{x^2} \geq 0$ .

19. (R) Wyznacz dziedzinę funkcji  $f$  określonej wzorem:  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-2x^2-x+2}{x+4}}$ .

20. (R) Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$  dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x \neq -1$ . Rozwiąż nierówność  $f(x) > f(2-x)$ .

21. (R) Przedział  $(-\frac{3}{2}, 0)$  jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności  $\frac{2}{x} < m$  z niewiadomą  $x$ . Oblicz  $m$ . Zakoduj trzy pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby  $|m|$ .

22. (R) Rozwiąż równanie:

a)  $\left| \frac{3}{|x+2|} - 1 \right| = 8$ ,

b)  $\left| \frac{6x-3}{2x+1} \right| = 3$ .

23. (R) Rozwiąż nierówność:

a)  $\frac{1}{|4-3x|} > 2$ ,

b)  $\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| < 3$ ,

c)  $\left| \frac{1}{|x|} \right| < 1$ .

24. (R) Funkcja homograficzna  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{px-3}{x-p}$ , gdzie  $p \in \mathbb{R}$  jest parametrem i  $|p| \neq \sqrt{3}$ .

a) Dla  $p = 1$  zapisz wzór funkcji w postaci  $f(x) = k + \frac{m}{x-1}$ , gdzie  $k$  oraz  $m$  są liczbami rzeczywistymi.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ , dla których w przedziale  $(p, +\infty)$  funkcja  $f$  jest malejąca.

25. (R) **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Wykres funkcji  $f(x) = \frac{4x-2}{x-2}$  można otrzymać przesuwając wykres funkcji:

(A)  $f(x) = \frac{6}{x}$ ,      (B)  $f(x) = \frac{2}{x}$ ,      (C)  $f(x) = \frac{6}{x-2}$ ,      (D)  $f(x) = x - 2$ .

b) Dziedziną funkcji  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+m}$  jest zbiór liczb rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy:

(A)  $m \neq 4$ ,      (B)  $m = 4$ ,      (C)  $m < 4$ ,      (D)  $m > 4$ .

c) W zbiorze rozwiązań nierówności  $\frac{1}{(x+3)^3} < \frac{1}{x+2}$  zawarty przedział:

(A)  $(-5, -4)$ ,      (B)  $(-4, -3)$ ,      (C)  $(-3, -2)$ ,      (D)  $(-2, -1)$ .

d) Które z podanych równań jest spełnione przez co najmniej jedną liczbę całkowitą?

(A)  $\frac{5}{|4x+2|} = 2$       (B)  $\frac{4}{|5x-2|} = 1$       (C)  $\frac{3}{|2x-1|} = 2$       (D)  $\frac{2}{|3x+1|} = 1$