1. (R) Oblicz granicę funkcji:

   a) $f(x) = \frac{x^3-3x-2}{3x^2-4x-4}$ w punkcie $x_0 = 2$,

   b) $f(x) = \frac{3x^2-5x-2}{x^2-4}$ w punktach $x_0 = 2$, $x_0 = -2$ oraz przy $x \to \infty$,

   c) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{6-2x}$ w punkcie $x_0 = 3$,

   d) $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$ przy $x \to \infty$,

   e) $f(x) = \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$ w punkcie $x_0 = 1$,

   f) $f(x) = \frac{64-x^3}{x-4}$ w punkcie $x_0 = 4$,

   g) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ przy $x \to -\infty$,

   h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ przy $x \to \infty$,

   i) $f(x) = \frac{\sin 3x}{4x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

2. (R) Wyznacz równania asymptot funkcji:

   a) $f(x) = \frac{3x-6}{2x+2}$,

   b) $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{1-x}$.

3. (R) Udowodnij, że pochodna funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ określona jest wzorem $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

4. (R) Dla jakiej wartości parametru k zachodzi równość:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-(k+1)x+k}{x^2-1} = 5.$$

5. (R) Naszkicuj wykres pewnej funkcji f, która spełnia następujące warunki:
   a) dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$,
   b) jest ciągła w swojej dziedzinie,
   c)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -4,$$
$$\lim_{x\to-3} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty.$$

6. (R) **a)** Zbadaj ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2x^2+3x+2}{x-2}, & x \neq 2 \\ -5, & x = 2 \end{cases}$$

   (R) **b)** Wykonaj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leqslant 0 \\ m - x, & x > 0 \end{cases}$ dla tej wartości parametru m, dla której funkcja f jest ciągła.

7. (R) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{2x^4+15}{6-x^2}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, takich, że $x \neq -\sqrt{6}$ i $x \neq \sqrt{6}$. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x = 1$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonego wyniku.

8. (R) Wyznacz pochodną funkcji:
   a) $f(x) = -3x^2 + x$ dla $x_0 = 0$,
   b) $f(x) = (x-2)^2(1-x^2)$,
   c) $f(x) = \frac{2x^2-x+1}{3x-x^2}$,
   d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$,
   e) $f(x) = \sqrt{7x^2+x}$.

9. (R) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Uzasadnij, że prosta l o równaniu $10x - y + 9 = 0$ jest styczna do wykresu funkcji f.

10. (R) **a)** Wyznacz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x^2-1}{1-x^2}$ w $x_0 = 2$.

    b) Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = 3x^2 - x + 4$ oraz punkt $M = (1, y_0)$ należący do wykresu tej funkcji. Wyznacz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji w punkcie M. Wyznacz równanie tej stycznej.

    c) Wyznacz kąt, który styczna do wykresu funkcji w punkcie o odciętej $x_0 = \frac{1}{2}$ tworzy z dodatnią półosią osi OX, gdy $f(x) = 2\sqrt{3}x^4$.

11. (R) Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 1$ i leżący na niej punkt A o współrzędnej x równej 3. Wyznacz równanie stycznej do paraboli w punkcie A.

12. (R) Wyznacz parametry a, b wiedząc, że funkcja $y = x^3 + ax + b$ w punkcie $x = 3$ osiąga ekstremum równe 1.

13. (R) Dana jest funkcja określona wzorem $y = \sqrt{3x^2 + 1}$. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ funkcja ta spełnia warunek $y \cdot y' - 3x = 0$.

14. (R) Dla jakich wartości parametru m funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{1}{3}mx^3 - 2x^2 + (m-3)x + 1$ jest funkcją rosnącą w $\mathbb{R}$.

15. (R) Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = x^3 - 6x^2 + c$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$.
    a) Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -1, 3\rangle$ wiedząc, że $f(0) = 8$.
    b) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

16. (R) Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji $f(x) = 6x^2 - x^3$.

17. (R) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$.

18. (R) Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - px^2 + 5x - 2$.
    a) Znajdź taką wartość parametru p, dla której funkcja f osiąga minimum w punkcie $x = 5$.
    b) Dla wyznaczonego p podaj przedziały monotoniczności funkcji f.

19. (R) Funkcja f zmiennej rzeczywistej x jest określona wzorem $f(x) = x^2 - mx$.
    a) Dla jakich wartości m, funkcja f jest malejąca w przedziale $(-1, 1)$?
    b) Dla $m = 3$ wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle 1, 4\rangle$.

20. (R) Dla jakiej wartości parametru k funkcja $f(x) = x^3 - 4x^2 + kx$ osiąga ekstremum w punkcie $x_0 = 1$? Wyznacz drugie ekstremum i określ rodzaj każdego z nich.

21. (R) Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x + 1$ w $\langle 0, 3\rangle$.

22. (R) Funkcja f ma następujące własności:
    - jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
    - f jest funkcją nieparzystą,
    - f jest funkcją ciągłą oraz:
    $f'(x) < 0$ dla $x \in (-8, -3)$,
    $f'(x) > 0$ dla $x \in (-3, -1)$,
    $f'(x) < 0$ dla $x \in (-1, 0)$,
    $f'(-3) = f'(-1) = 0$,
    $f(-8) = 0$,
    $f(-3) = -2$,
    $f(-2) = 0$,
    $f(-1) = 1$.
    W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie naszkicuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -8, 8\rangle$, wykorzystując podane powyżej informacje o jej własnościach.

23. (R) Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = x^3 - 6x^2 + c$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$.
    a) Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -1, 3\rangle$, wiedząc, że $f(0) = 8$.
    b) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

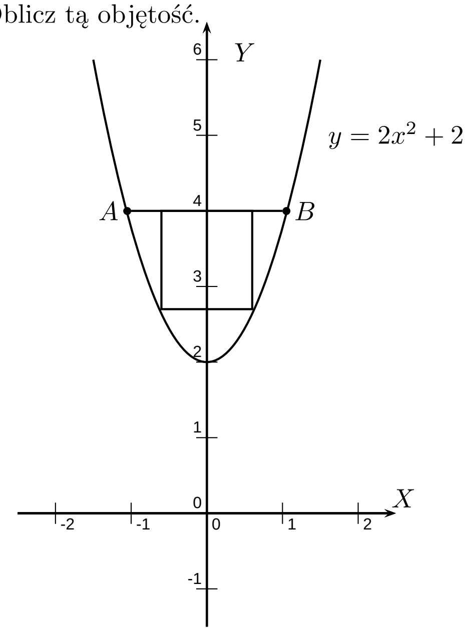
24. (R) Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w których krótsza podstawa ma długość 5 i każde z ramion też ma długość 5. Oblicz długość dłuższej podstawy tego z rozpatrywanych trapezów, który ma największe pole. Oblicz to pole.

25. (R) Jaki prostokąt o obwodzie 36 cm ma najkrótszą przekątną?

26. (R) Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12. Jaka powinna być długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, aby jego objętość była największa?

27. (R) Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i wysokości tego ostrosłupa jest równa 24. Wyznacz promień okręgu opisanego na podstawie tego z ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tą objętość.

28. (R) Rozważmy wszystkie prostokąty, których wierzchołki leżą na odcinku AB, gdzie $A = (-1, 4)$ i $B = (1, 4)$, a pozostałe dwa na paraboli o równaniu $y = 2x^2 + 2$ (zobacz rysunek). Wyznacz wymiary tego z prostokątów, który ma najwieksze pole. Oblicz to pole.



29. (R) **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przyjmuje dla $x > 2$ wartość stałą równą 4. Funkcja ta nie ma granicy w punkcie $x_0 = 2$, jeśli dla $x \leqslant 2$ jest określona wzorem:
(A) $f(x) = -2x + 8$, **(B)** $f(x) = -x + 6$, **(C)** $f(x) = 3x - 2$, **(D)** $f(x) = 2x + 2$.

b) Granica

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{-5x}{x+3}$$

jest równa
(A) $-\infty$, **(B)** 0, **(C)** 6, **(D)** $+\infty$.

c) Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dla} \quad x < x_0 \\ (x-1)^2 - 2 & \text{dla} \quad x \geqslant x_0 \end{cases}$$

Istnieją dwie wartości x_0, dla których funkcja f ma granicę w punkcie x_0. Iloczyn tych liczb jest równy:
(A) -6, **(B)** -4, **(C)** 3, **(D)** 6.

d) Styczna do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ w punkcie o odciętej $x_0 = 2$ tworzy z osią OX kąt równy:
(A) 60°, **(B)** 120°, **(C)** 135°, **(D)** 150°.

e) Ile ekstremów lokalnych ma funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{4}x^3$?
(A) 3, **(B)** 2, **(C)** 1, **(D)** 0.