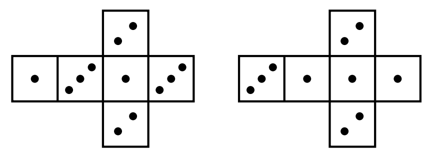
1. Każdej karcie bankomatowej jest przypisany numer identyfikacyjny zwany kodem PIN. Kod ten składa się z czterech cyfr (cyfry mogą się powtarzać, ale kodem PIN nie może być 0000). Oblicz prawdopodobieństwo, że w losowo utworzonym kodzie PIN żadna cyfra się nie powtórzy. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

2. Krzyś rzuca dwa razy symetryczną kostką do gry i oblicza iloczyn wyrzuconych oczek. Jeśli iloczyn oczek należy do przedziału domkniętego $\langle 12, 16\rangle$, to Krzyś wygrywa. W pozostałych przypadkach przegrywa.
a) Uzupełnij tabelę tak, aby przedstawiała wszystkie możliwe wyniki.

I \ II	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4		
2	2	4	6			
3	3	6				
4	4	8				
5						
6						

b) Podaj liczbę wyników sprzyjających wygranej Krzysia i oblicz prawdopodobieństwo wygranej.

3. Mamy dwie jednorodne kostki sześcienne, których siatki przedstawione są na rysunku. Rzucamy jednocześnie dwiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
a) iloczyn oczek będzie równy 9,
b) na obu kostkach uzyskamy tę samą liczbę oczek,
c) suma oczek nie przekroczy liczby 3.



4. W pewnej grze rzuca się trzema kostkami i oblicza sumę oczek. Krupier twierdzi, że nie ma znaczenia, czy postawimy na sumę oczek równą 10 czy 9, ponieważ każdą z nich można uzykać na 6 sposobów.
$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$,
$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 2 + 5 = 2 + 2 + 6 = 3 + 3 + 4$.
Czy krupier ma rację? Odpowiedź uzasadnij.

5. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ układamy wszystkie możliwe liczby 3-cyfrowe o różnych cyfrach. Z liczb tych wybieramy losowo jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie ona wielokrotnością liczby 65?

6. Dany jest sześcian o wierzchołkach $ABCDA_1B_1C_1D_1$ i krawędzi długości 1. Wybieramy losowo dwa wierzchołki tego sześcianu. Wyznaczają one odcinek, którego są końcami. Niech A oznacza zdarzenie, że losowo wybrane wierzchołki wyznaczyły odcinek długości 1, natomiast B - zdarzenie, że losowo wybrane wierzchołki wyznaczyły odcinek długości $\sqrt{2}$. Oblicz i porównaj prawdopodobieństwo zdarzeń A i B.

7. Spośród liczb: $0, 1, 2, 3, 4, ..., 1000$ wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba ta jest podzielna przez 4 lub 5.

8. Spośród liczb: $-9, -7, -5, -3, -1, 0, 2, 4, 6, 8$ losujemy dwie różne liczby a i b, a następnie zapisujemy ich iloczyn $a \cdot b$. Oblicz i porównaj prawdopodobieństwa zdarzeń A i B, jeśli: A oznacza zdarzenie, że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą nieujemną; B - zdarzenie, że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą niedodatnią.

9. Strzelając do tarczy pewien strzelec uzyskuje co najmniej 9 punktów z prawdopodobieństwem $0,5$, a co najwyżej 9 punktów z prawdopodobieństwem $0,7$. Oblicz prawdopodobieństwo, że ten strzelec uzyska dokładnie 9 punktów.

10. O zdarzeniach losowych A i B wiemy że: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$. Oblicz:
a) $P(A \cap B)$,
b) $P(A \setminus B)$.

11. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry i określamy zdarzenia: A - wyrzucono dwa razy tę samą liczbę oczek, B - suma wyrzuconych oczek jest większa od 7. Oblicz prawdopodobieństwo sumy tych zdarzeń.

12. Niech A, B będą zdarzeniami zawartymi w przestrzeni Ω. Wiedząc, że $P(A) = 0,62$, $P(B') = 0,8$ i $P(A \cup B) = 0,5$, oblicz $P(A \cap B)$ i $P(A \setminus B)$.

13. W urnie znajdują się kule z kolejnymi liczbami $10, 11, 12, 13, ..., 50$, przy czym kul z liczbą 10 jest 10, kul z liczbą 11 jest 11 itd., a kul z liczbą 50 jest 50. Z urny tej losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy kulę z liczbą parzystą.

14. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, ..., 7\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

15. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

16. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

    a) Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech p oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 5. Wtedy
    (A) $p = \frac{1}{36}$, **(B)** $p = \frac{1}{18}$, **(C)** $p = \frac{1}{12,}$ **(D)** $p = \frac{1}{9}$.

    b) Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 15\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Prawdopodobieństwo, że wybierzemy liczbę, której dzielnikiem jest liczba 3, wynosi:
    (A) $\frac{5}{9}$, **(B)** $\frac{4}{9}$, **(C)** $\frac{1}{3}$, **(D)** $\frac{2}{3}$.

    c) Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej cyfrze bez zwracania. Zapisując wylosowane cyfry w kolejności losowania, otrzymujemy liczbę dwucyfrową. Prawdopodobieństwo otrzymania liczby większej od 32 jest równe:
    (A) $\frac{28}{49}$, **(B)** $\frac{29}{49}$, **(C)** $\frac{28}{42}$, **(D)** $\frac{29}{42}$.

    d) Jeżeli A jest zdarzeniem losowym, a A' - zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A oraz zachodzi równość $P(A) = 2 \cdot P(A')$, to
    (A) $P(A) = \frac{2}{3}$, **(B)** $P(A) = \frac{1}{2}$, **(C)** $P(A) = \frac{1}{3}$, **(D)** $P(A) = \frac{1}{6}$.

17. (R) Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

18. (R) Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczby oczek otrzymanych w wszystkich czterech rzutach będzie równy 60.

19. (R) W wycieczce szkolnej bierze udział 16 uczniów, wśród których tylko czworo zna okolicę. Wychowawca chce wybrać w sposób losowy 3 osoby, które mają pójść do sklepu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych trzech osób będą dokładnie dwie znające okolicę.

20. (R) Do szkolnych zawodów szachowych zgłosiło się 16 uczniów, wśród których było dwóch faworytów. Organizatorzy zawodów zamierzają losowo podzielić szachistów na dwie jednakowo liczne grupy eliminacyjne, Niebieską i Żółtą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że faworyci tych zawodów nie znajdą się w tej samej grupie eliminacyjnej. Końcowy wynik obliczeń zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

21. (R) Z szuflady, w której znajduje się 10 różnych par rękawiczek wybieramy losowo cztery rękawiczki. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a następnie oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
    A - wśród wylosowanych rękawiczek nie będzie pary,
    B - wśród wylosowanych rękawiczek będzie dokładnie jedna para.

22. (R) Na dwóch prostych równoległych obrano 9 punktów: na jednej z nich 4 punkty a na drugiej 5 punktów. Ze zbioru tych punktów losujemy jednocześnie trzy punkty. Oblicz prawdopodobieństwo, że są one wierzchołkami pewnego trójkąta.

23. (R) Na stole leżało 14 banknotów: 2 banknoty o nominale 100 zł, 2 banknoty o nominale 50 zł i 10 banknotów o nominale 20 zł. Wiatr zdmuchnął na podłogę 5 banknotów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na podłodze leży dokładnie 130 zł. Odpowiedź podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

24. (R) **a)** Drużyna siatkówki składa się z sześciu zawodników. Do kontroli antydopingowej wybiera się dwóch zawodników. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kontroli poddany zostanie kapitan drużyny?
    b) Wśród 12 żarówek 4 są wadliwe. Wybrano losowo 3 żarówki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna z nich jest dobra?

25. (R) Wielokąt wypukły ma n wierzchołków ($n \geqslant 3$ i $n \in \mathbb{N}_+$), wśród których losujemy jednocześnie dwa. Wyznacz n wiedząc, że prawdopodobieństwo wylosowania wierzchołków wyznaczających przekątną tego wielokąta jest mniejsze od $\frac{4}{5}$.

26. (R) Ze zbioru liczb $\{1, 2, ..., 2n + 5\}$ wybieramy jednocześnie dwie liczby. Na ile sposobów możemy to zrobić, tak aby otrzymać dwie liczby takie, że:
    a) ich różnica będzie liczbą parzystą,
    b) suma ich kwadratów będzie liczbą podzielną przez cztery?

27. (R) Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką sześcienną do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A - na każdej kostce wypadnie nieparzysta liczba oczek.

28. (R) W urnie znajduje się n kul czarnych i $2n$ kul białych ($n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 2$.). Losujemy jednocześnie dwie kule. Dla jakich n prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru jest większe od prawdopodobieństwa wylosowania dwóch kul różnych kolorów?

29. (R) Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ wybieramy jednocześnie losowo cztery liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą będzie 3 lub największą wylosowaną liczbą będzie 7.

30. (R) Dwaj strzelcy trafiają do celu z prawdopodobieństwem $0,8$ i $0,7$. Strzelcy oddają po jednym strzale. Oblicz prawdopodobieństwo, że cel zostanie trafiony:
    a) dwa razy,
    b) dokładnie jeden raz,
    c) co najwyżej raz.

31. (R) Tabela przedstawia liczbę uczniów wszystkich klas III pewnego liceum.

Klasa	Liczba wszystkich uczniów	Liczba chłopców
III a	30	10
III b	32	24
III c	25	15
III d	27	18

    Spośród wszystkich klas trzecich wybieramy losowo jedną klasę, a następnie z tej klasy jednego ucznia. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybranym uczniem będzie dziewczynka.

32. (R) Wybieramy losowo jedną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ i gdy otrzymamy liczbę n, to rzucamy n razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

33. (R) Z pojemnika, w którym jest pięć losów: dwa wygrywające i trzy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

34. (R) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w trzech rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3.

35. (R) Uczniowie dojeżdżający do szkoły zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20% jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi

autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Oblicz prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu w losowo wybrany dzień nauki.

36. (R) Mając dane $P(A) = 0,9$, $P(B|A') = 0,75$ i $P(B|A) = 0,95$ oblicz $P(B)$.

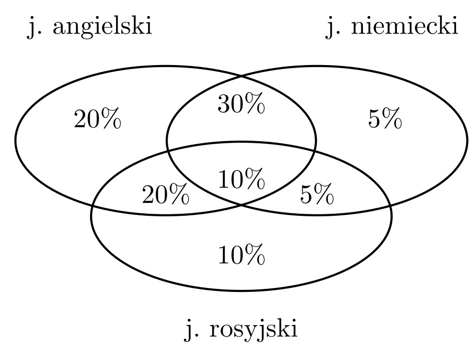
37. (R) Zdarzenia losowe A, B są zawarte w Ω oraz $P(A \cap B') = 0,7$ (A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A, B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B). Wykaż, że $P(A' \cap B) \leqslant 0,3$.

38. (R) A, B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,9$ i $P(B) = 0,7$, to $P(A \cap B') \leqslant 0,3$ (B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B).

39. (R) Wiadomo, że $P(A \cap B') = P(B \cap A')$, $P(A \cup B) = 0,75$, $P(A \cap B) = 0,25$. Oblicz: $P(B)$, $P(A - B)$.

40. (R) Wykaż, że jeśli A, B są dowolnymi zdarzeniami przestrzeni Ω, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

41. (R) Wśród 100 losowo wybranych uczniów przeprowadzono ankietę. Zadano pytanie, których języków spośród angielskiego, niemieckiego, rosyjskiego uczyłeś się co najmniej przez 2 lata? Procentowe wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że osoba wybrana losowo spośród osób ankietowanych uczyła się języka angielskiego, N - uczyła się języka niemieckiego i R - języka rosyjskiego. Czy niezależne są zdarzenia:
a) A i N,
b) A i R.



42. (R) Ze zbioru liczb $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania. Sprawdź niezależność zdarzeń:
A - suma wylosowanych liczb jest większa od 8,
B - za pierwszym razem wylosujemy liczbę nieparzystą.

43. (R) Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, to $P(A \cap B') = P(A)P(B')$. B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B.

44. (R) Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,7$ i $P(B) = 0,8$, to $P(A|B) \geqslant 0,625$. $P(A|B)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe.

45. (R) Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 12, 13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

46. (R) Janek przeprowadza doświadczenie losowe, w którym jako wynik może otrzymać jedną z liczb: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Prawdopodobieństwo p_k otrzymania liczby k jest dane wzorem: $p_k = \frac{1}{64} \cdot \binom{6}{k}$.
Rozważmy dwa zdarzenia:
- zdarzenie A polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru $\{1, 3, 5\}$.
- zdarzenie B polegające na otrzymanu liczby ze zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6\}$.
Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$.

47. (R) Niech A, B będą zdarzeniami o prawdopodobieństwach $P(A)$ i $P(B)$. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,85$ i $P(B) = 0,75$, to prawdopodobieństwo warunkowe spełnia nierówność $P(A|B) > 0,8$.

48. (R) Rzucamy dwiema kostkami sześciennymi. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia sumy oczek równej 4 pod warunkiem, że bezwzględna wartość różnicy oczek wyrzuconych na poszczególnych kostkach jest równa 2.

49. (R) **a)** Rzucamy raz symetryczną monetą. Zdarzeniu - wypadł orzeł przypisujemy 2, a zdarzeniu - wypdła reszka przypisujemy liczbę (-1). Podaj rozkład zmiennej losowej.

b) Zorganizowano następującą grę: rzucamy trzema symetrycznymi monetami. Jeśli:

a) na wszystkich monetach wypadnie orzeł, wygrywamy 10 zł,

b) na wszystkich monetach wypadnie reszka, wygrywamy 5 zł,

c) wypadną dokładnie dwa orły, przegrywamy 10 zł,

d) wypadną dokładnie dwie reszki, przegrywamy 1 zł.

Podaj rozkład zmiennej losowej. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej.

c) Strzelec ma cztery naboje i strzela do tarczy do momentu trafienia w nią lub do momentu wystrzelenia wszystkich naboi. Liczba wystrzelonych naboi jest zmienną losową. Podaj rokład wiedząc, że prawdopodobieństwo trafienia celu przy każdym strzale jest równe $0,7$. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej.

50. (R) **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Dane są dwie urny z kulami. W każdej jest 5 kul. W pierwszej urnie jest jedna kula biała i 4 kule czarne. W drugiej są 3 kule białe i 2 kule czarne. Rzucamy jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno lub dwa oczka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, jeśli wypadną co najmniej trzy oczka, to losujemy jedną kulę z drugiej urny. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe
(A) $\frac{1}{15}$, **(B)** $\frac{2}{5}$, **(C)** $\frac{7}{15}$, **(D)** $\frac{3}{5}$.

b) Spośród punktów o współrzędnych (x, y), gdzie $x \in \{1, 2, 3\}$ i $y \in \{2, 4\}$ losowo wybieramy dwa różne punkty. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wybrane punkty wyznaczą wektor równoległy do osi OX jest
(A) równe $\frac{2}{5}$, **(B)** równe $\frac{1}{2}$, **(C)** mniejsze lub równe $\frac{2}{5}$, **(D)** większe lub równe $\frac{1}{2}$.

c) Pierwsza loteria zawiera n losów, gdzie $n \geqslant 2$. Jeden z nich jest wygrywający. Druga zawiera $2n$ losów, z których dwa są wygrywające. Kupując dwa losy szansa wygrania jest
(A) większa w pierwszej loterii, **(B)** większa w drugiej loterii,
(C) równa w obu loteriach, **(D)** uzależniona od liczby losów w każdej loterii.

d) Losujemy dwa wierzchołki n - kąta foremnego. Prawdopodobieństwo tego, że odcinek o końcach w wylosowanych punktach nie będzie bokiem tego wielokąta wynosi
(A) $\dfrac{\binom{n}{2}-n}{\binom{n}{2}}$, **(B)** $1-\frac{2}{n-1}$, **(C)** $\dfrac{\binom{n-3}{2}}{\binom{n}{2}}$, **(D)** $\dfrac{n}{\binom{n}{2}}$.